

درس اول: ریشه و توان و ریشه n ام

$b^2 = a$
 $\begin{cases} \xrightarrow{a \geq 0, a \text{ نامنفی است}} \\ \xrightarrow{b \in \mathbb{R}} \end{cases}$

a را توان دوم b یا مربع b یا مجذور b گوئیم
 $b \Rightarrow \sqrt{b^2} = \sqrt{a} \Rightarrow |b| = \sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{a} \\ b = -\sqrt{a} \end{cases}$

نتیجه:

۱- هر عدد مثبت ۲ ریشه ی دوم دارد که قرینه یکدیگرند.

۲- ریشه ی دوم صفر برابر صفر است. $\sqrt{0} = 0$

۳- عددهای منفی ریشه ی دوم ندارند.

$b^3 = a$
 $\begin{cases} \xrightarrow{a \in \mathbb{R}} \\ \xrightarrow{b \in \mathbb{R}} \end{cases}$

a را توان سوم b یا مکعب b گوئیم
 $b \rightarrow \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{a} \Rightarrow b = \sqrt[3]{a}$

نتیجه: هر عدد حقیقی فقط یک ریشه ی سوم دارد.

$$\begin{cases} b > 0 \Leftrightarrow b^3 = a > 0 \\ b < 0 \Leftrightarrow b^3 = a < 0 \\ b = 0 \Leftrightarrow b^3 = a = 0 \end{cases}$$

مثال (۱)

$$b^5 = 32 \Leftrightarrow b = 2$$

$$b^3 = -8 \Leftrightarrow b = -2$$

ریشه ی n ام

فرض کنید n عدد طبیعی و بزرگتر مساوی ۲ می باشد. در این صورت ریشه ی n ام عدد a را با b به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 \quad b^n = a$$

❖ نکته :

ریشه ی r ام عدد k در صورت وجود برابر با t می باشد اگر $t^r = k$

$$b^n = a \quad \begin{cases} \xrightarrow{\text{زوج } n} \begin{cases} a > 0 & \text{در ریشه ی } n \text{ ام قرینه دارد} \\ \sqrt[n]{b^n} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow |b| = \sqrt[n]{a} \Rightarrow b = \pm \sqrt[n]{a} \\ a < 0 & \text{ریشه ی } n \text{ ام } a \text{ وجود ندارد} \end{cases} \\ \xrightarrow{\text{فرد } n} \begin{cases} a \in \mathbb{R} \rightarrow \text{فقط یک ریشه } n \text{ ام دارد} \\ \sqrt[n]{b^n} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow b = \sqrt[n]{a} \end{cases} \end{cases}$$

ریشه ی n ام عدد صفر برابر صفر است. $\sqrt[n]{0} = 0$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = |a|$$

مثال (۲)

معادله ی $\sqrt[5]{x} = x$ را حل کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

مثال (۳) حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$۱) \left(\sqrt[7]{-2\sqrt{2}} \right)^{۱۴} + \left(\sqrt[5]{3\sqrt[4]{2}} \right)^{۲۰} - (\sqrt[6]{7})^6$$



$$۲) \sqrt[4]{(2 - \sqrt{3})^4} + \sqrt[9]{(\sqrt{3} - 4)^9} =$$

مثال ۴) ریشه ی دهم 5^5 و ریشه ی سیزدهم $729\sqrt[13]{3}$ و ریشه ی چهارم 2^{12} را بیابید .

مثال ۵) اگر $a, b < 0$ باشد حاصل $\frac{\sqrt[4]{(a+b)^4}}{\sqrt[5]{(a+b)^5}}$ کدام است ؟

الف) ۱

ب) -۱

ج) $\sqrt[12]{a+b}$

د) $a+b$

مثال ۶) حاصل $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[3]{(-x)^3} - \sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^3}$ وقتی که $x < 0$ را بیابید .

مثال ۷) اگر $1 \leq x \leq -1$ باشد حاصل عبارت زیر بیابید .

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$



مثال ۸) اگر $2 = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ باشد حدود x کدام است ؟

الف) $x \leq 1$ ب) $x \geq -1$ ج) $-1 \leq x \leq 1$ د) $x \leq -1$

خواص ریشه گیری (یا خواص رادیکال ها)

$$\left\{ \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 2 \\ \text{اگر } m, n \text{ زوج باشند, } a, b \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$۱) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$۲) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad b \neq 0$$

$$۳) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$۴) \begin{cases} \text{زوج } n & \sqrt[n]{a^n} = |a| \\ \text{فرد } n & \sqrt[n]{a^n} = a \end{cases}$$

$$۵) \begin{cases} \text{زوج } n & \sqrt[n]{a^n b} = |a| \sqrt[n]{b} \\ \text{فرد } n & \sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b} \end{cases}$$

$$۶) \begin{cases} \text{اگر } n \text{ فرد باشد} & a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \\ \text{اگر } n \text{ زوج و } a < 0 & a \sqrt[n]{b} = -(-a) \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{(-a)^n b} \end{cases}$$

$$۱) \text{ مثال } -2\sqrt{3} =$$

$$۲) \text{ مثال } \sqrt[3]{-5} \sqrt[3]{3} =$$

$$۷) \sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

$$۸) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$۹) \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

یادمان باشد :

$$\sqrt[n]{a^n \pm b^n} \neq \sqrt[n]{a^n} \pm \sqrt[n]{b^n}$$



مثال ۹) حاصل عبارات زیر را بدست آورید .

$$۱) \sqrt[3]{-۲} \times \sqrt[3]{۳} =$$

$$۲) \frac{\sqrt[5]{۱۶}}{\sqrt[4]{۸}} =$$

$$۳) \sqrt[3]{-\sqrt{۳}\sqrt[4]{۵}}$$

$$۴) \frac{(\sqrt[3]{۵})^۴(\sqrt[3]{۵})^۲}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{۱۰.۵}} \div \sqrt[6]{\sqrt{۱۰.۳}}}}$$

$$۵) \frac{\sqrt[3]{۲\sqrt[4]{۲}\sqrt[3]{۲} \times \sqrt[6]{\sqrt[4]{۲}^{۱۳}}}}{\sqrt[3]{۲ - \sqrt[3]{۲}} \sqrt[6]{۶ + ۴\sqrt[3]{۲}}}$$



$$۶) \frac{\sqrt[6]{64a^{12}b^6}}{\sqrt[5]{a^8b^{15}}} \quad b > 0$$

$$۷) -2\sqrt[4]{3} = \dots\dots\dots$$

$$۸) a\sqrt[3]{-a} = \dots\dots\dots$$

مثال (۰۱) حاصل عبارت $x\sqrt{-x}\sqrt[3]{x}$ کدام است ؟

الف) $\sqrt[11]{x^6}$ ب) $-\sqrt[6]{x^{11}}$ ج) $\sqrt[6]{-x^{11}}$ د) $-\sqrt[11]{x^6}$

مثال (۱۱) حاصل $\sqrt[3]{x-1} \times \sqrt{1-x}$ کدام است ؟

الف) $\sqrt[5]{(x-1)^8}$ ب) $\sqrt[6]{(1-x)^2}$ ج) $-\sqrt[5]{(1-x)^8}$ د) $-\sqrt[6]{(x-1)^8}$

مثال (۱۲) اگر $ab > 0$ و $b\sqrt{a^2} - a = 0$ حاصل $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ کدام است ؟

الف) $1 \pm a$ ب) $1 - a$ ج) $b - 1$ د) $a - b$



مثال ۱۳) $\sqrt[n]{a^2}$ در صورتی که $a < 0$ باشد برابر است با :

(د) $\sqrt[n]{a}$

(ج) $\sqrt[n]{-a}$

(ب) $\sqrt[n]{a}$

(الف) $\pm \sqrt[n]{a^2}$

مثال ۱۴) حاصل عبارات زیر را بیابید .

۱) $\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + \dots}}} =$

۲) $\left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3} \right)^2} \right)^{-5} - \left(\sqrt[7]{\left(\frac{4}{3} \right)^{-1}} \right)^7$

۳) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18}\sqrt[4]{\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}} =$

۴) $\sqrt{-x^7}$



$$۵) \sqrt{-ab^2} + \sqrt{-a^2b}$$

$$۶) \sqrt{\frac{x^4}{6} \sqrt{\frac{81}{256x^4}}}$$

$$۷) \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$$

$$۸) \sqrt[3]{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \times \sqrt[6]{7 - 2\sqrt{10}}$$

$$۹) \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right) \left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \right)$$



مثال (۱۵) در هر قسمت علامت a و b و c را تعیین کنید.

$$۱) \sqrt[4]{ab^8c^{12}} = -bc^2\sqrt[4]{b^2a}$$

$$۲) \sqrt[4]{\frac{-b^9c^4}{a^5}} = \frac{b^2c}{a} \sqrt[4]{\frac{-b}{a}}$$

$$۳) \sqrt{\frac{-b^2a}{c^3}} = \frac{b}{c} \sqrt{\frac{-a}{c}}$$

مثال (۱۶) اعداد زیر را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

$$\sqrt[3]{-1} \text{ و } \sqrt[3]{10} \text{ و } \sqrt[3]{27} \text{ و } \sqrt[3]{3} \text{ و } \sqrt[5]{32} \text{ و } \sqrt[3]{-8} \text{ و } \sqrt[4]{625} \text{ و } -\sqrt[3]{6}$$

نتیجه: رادیکال هایی مانند $\sqrt{a}$ و $\sqrt[3]{b}$ که عدد زیر رادیکال یعنی $a > 0$ مربع کامل و $b \in \mathbb{R}$ مکعب کامل نیست یک عدد اعشاری هستند و از همان $\sqrt{a}$ و $\sqrt[3]{b}$ برای نمایش مقدار دقیق آنها استفاده می شود و در واقعیت هیچگاه مقدار دقیق آن ها به صورت اعشاری قابل نمایش نیست.

مثال (۱۷) مقدار تقریبی $\sqrt{40}$ را با تقریب ۰/۱ بدست آورید.

$$\begin{aligned} 36 &< 40 < 49 \\ &\downarrow \\ 6 &< \sqrt{40} < 7 \end{aligned}$$

۶	۶/۱	۶/۲	۶/۳	۶/۴
۳۶	۳۷/۲۱	۳۸/۴	۳۹/۵	۴۰/۹۶



مثال ۱۸) حجم مخزن آبی شکل مکعب است برابر $25 m^3$ طول ضلع را (تا یک صدم اعشار) تقریب بزنید.

$$a^3 = 25 \Rightarrow a = \sqrt[3]{25}$$

$$8 < 25 < 27 \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{25} < 3$$

۳	۲/۹	۲/۸		۲/۹۰	۲/۹۱	۲/۹۲	۲/۹۳
۲۷	۲۴/۳۸	۲۷/۹۵	$\Rightarrow$	۲۴/۳۸	۲۴/۶۴	۲۴/۸۹	۲۵/۱۵

مثال ۱۹) هر یک از اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح قرار دارند.

الف) $\sqrt[4]{43}$

ب) $\sqrt[5]{-12}$

ج) $\sqrt{\frac{1}{20}}$

مثال ۲۰) چند عدد صحیح وجود دارد که ریشه ی دومشان بین ۳ و ۴ می باشد.

مثال ۲۱) چند عدد صحیح وجود دارد که ریشه ی چهارم آن ها بین ۲ و ۳- است.



مثال (۲۲) چند عدد صحیح وجود دارد که ریشه ی سوم آن ها بین ۳- و ۴- است.

مثال (۲۳) مقدار تقریبی $\sqrt{53}$ با تقریب ۰/۱ کدام است؟

الف) ۷/۱

ب) ۷/۲

ج) ۷/۳

د) ۷/۴

$$\sqrt[n]{a^n \pm b} \simeq a \pm \frac{b}{n a^{n-1}}$$

❖ نکته:

مقایسه بین ریشه های مختلف یک عدد

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 1 \Rightarrow \dots < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n-1]{a} < \sqrt[n-2]{a} < a < a^2 < \dots \\ 0 < a < 1 \Rightarrow \dots a^2 < a < \sqrt[n-2]{a} < \sqrt[n-1]{a} < \dots \\ -1 < a < 0 \Rightarrow \dots < \sqrt[n]{a} < a < a^2 < a^3 \\ a < -1 \Rightarrow \dots < a^5 < a^3 < a < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n-1]{a} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a < b \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{rn-1} < b^{rn-1} \\ \sqrt[rn-1]{a} < \sqrt[rn-1]{b} \end{array} \right. \\ 0 \leq a < b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^{rn} < b^{rn} \\ \sqrt[rn]{a} < \sqrt[rn]{b} \end{array} \right. \\ a < b < 0 \Leftrightarrow a^{rn} > b^{rn} \end{array} \right.$$

مثال (۲۴) هر دسته از اعداد زیر را با هم مقایسه کنید .

۱) $(-0.1)^3 \square (-0.1)^4$

۲) $\sqrt{10} \square \sqrt[3]{10}$

۳) $\sqrt[5]{2} \square \sqrt[4]{2}$

۴) $\sqrt[5]{0.7} \square \sqrt[3]{0.7}$



$$۵) \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \square \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$۶) \sqrt[3]{-7} \square \sqrt[5]{-7}$$

$$۷) \sqrt[3]{-0.1} \square \sqrt[5]{-0.1}$$

$$۸) \sqrt[3]{11} \square \sqrt[4]{11} \square \sqrt[5]{11}$$

$$۹) \sqrt[5]{\frac{1}{4}} \square \sqrt[7]{\frac{1}{4}} \square \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$۱۰) \sqrt[4]{\frac{1}{4}}, \sqrt[5]{-2}, \sqrt[5]{\frac{3}{4}}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[5]{\frac{-1}{2}}, \sqrt[5]{2}$$

مثال (۲۵) اگر $0 < a < 1$ آنگاه حاصل عبارات چیست ؟

$$A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$$

۴) صفر

۳) $2a$

۲) $2\sqrt{a}$

۱) $2\sqrt{a}$

مثال (۲۶) اگر $a > \sqrt{a}$ باشد ، آن گاه کدام یک درست نیست ؟

$$۴) \sqrt[4]{a^3} > \sqrt{a}$$

$$۳) \sqrt[3]{a^2} > a$$

$$۲) \sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$$

$$۱) a^3 > a^2$$

مثال (۲۷) کدام گزینه صحیح است ؟

$$۱) \sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < 2\sqrt[3]{2}$$

$$۲) \sqrt[3]{11} < 2\sqrt[3]{2} < \sqrt{5}$$

$$۳) \sqrt{5} < \sqrt[3]{11} < 2\sqrt[3]{2}$$

$$۴) \sqrt{5} < 2\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{11}$$

مثال (۲۸) کدام عدد بزرگتر از بقیه است ؟

$$۱) \sqrt[3]{2}$$

$$۲) \sqrt[5]{3}$$

$$۳) \sqrt[4]{10}$$

$$۴) \sqrt[15]{15}$$



توان های گویا

تعریف: برای هر $a > 0$ و $n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$ توان $\frac{1}{n}$ از a را به شکل زیر تعریف می کنیم .

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

مثال (۲۹) هر یک از اعداد زیر را تا جایی که ممکن است ساده کنید .

۱) $2^{\frac{1}{2}}$

۲) $(\sqrt{2})^{\frac{2}{5}}$

۳) $(-1)^{\frac{1}{3}} = \dots\dots\dots$

۴) $16^{\frac{1}{4}}$

۵) $(0.00032)^{\frac{1}{5}}$

تعریف: اگر a یک عدد حقیقی مثبت ($a > 0$) و $r = \frac{m}{n}$ یک عدد گویا باشد :

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \begin{cases} a > 0 \\ m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$



مثال (۳۰) حاصل عبارات زیر را بیابید .

۱) $4^{\frac{3}{4}}$

۲) $36^{-\frac{1}{2}}$

۳) $(\sqrt{2})^{\frac{3}{5}}$

۴) $(16)^{\frac{5}{4}}$

۵) $(243)^{-\frac{2}{5}}$

۶) $(-27)^{\frac{5}{3}}$

۷) $((-2)^2)^{-\frac{1}{5}}$

۸) $(2^0 + (\frac{1}{2})^{-1})^{-\frac{2}{5}}$

۹) $(2^{-1} - 5^0)^{\frac{1}{10}}$

۱۰) $\sqrt[5]{\sqrt[7]{-3}}$



$$11) ((-3)^{\frac{1}{7}})^{\frac{1}{5}}$$

مثال ۳۱) هر یک از روابط زیر را اثبات کنید .

$$۱) \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$۲) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

❖ نکته : قوانین توان رسانی با توان صحیح برای توان های گویا نیز برقرارند !

$$۱) a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$۵) (a^r)^s = a^{rs}$$

$$۲) \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad a \neq 0$$

$$۶) a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad a \neq 0$$

$$۳) a^r \times b^r = (ab)^r$$

$$۷) a > 0, r < s \Rightarrow a^r < a^s$$

$$۴) \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r \quad b \neq 0$$

$$۸) 0 < a < 1 \xrightarrow{r < s} r > s$$

مثال ۳۲) a عدد حقیقی و مثبت است و $a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{2}{4}}$ ، حدود a را بیابید .



مثال ۳۳) عبارات زیر را مقایسه کنید .

$$۱) \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} \square \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{5}}$$

$$۲) \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \square \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$۳) \left(\frac{0}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \square \left(\frac{0}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$$

مثال ۳۴) آیا تساوی روبرو برقرار است ؟

$$\left(8^{27}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{27}$$

مثال ۳۵) حاصل عبارات زیر را بیابید .

$$۱) \sqrt[3]{2\sqrt{2}\sqrt[3]{2}}$$

$$۲) \frac{\left(\frac{0}{25}\right)^{-2} \sqrt[5]{4}}{\sqrt{\left(\frac{0}{125}\right)^{-2}} \sqrt[5]{\frac{1}{8}}}$$

$$۳) \sqrt[3]{-3\sqrt[4]{27}}$$



$$۴) \sqrt[18]{(-8)^2}$$

$$۵) \sqrt{8^{-0.5}}$$

$$۶) (4 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \times (4 + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$$

$$۷) \frac{1}{\sqrt[8]{(1 - \sqrt{2})^{16}}}$$

مثال ۳۶) مقدار x را بیابید .

$$۱) \sqrt[6]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{2}$$

$$۲) \sqrt{5\sqrt{125}} = \sqrt{25^x}$$



$$۳) \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{8-3x}$$

$$۴) (2^2)^x = 2^{x^2}$$

$$۵) 9^{x+4} = 36^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

مجموعه تمرینات ریشه توان

۱) اگر $\sqrt[k]{a}$ و $\sqrt[k+1]{b}$ و $k \in \mathbb{N}$ تعریف شده باشد کدامیک از گزاره های زیر نادرست است ؟ برای رد آن ها مثال بیاورید .

الف) a الزاما عدد حقیقی مثبت است

ب) هر عدد حقیقی می تواند باشد

$$پ) \sqrt[k]{a} = x \Rightarrow a = x^{2k}$$

$$ت) a = x^{2k} \Rightarrow \sqrt[k]{a} = x$$



$$\text{ث) } \sqrt[k+1]{a} = y \Rightarrow a = y^{k+1}$$

$$\text{ج) } a = y^{k+1} \Rightarrow \sqrt[k+1]{a} = y$$

۲) در هر یک از موارد زیر اعداد پشت رادیکال را به درون رادیکال ببرید .

$$۱) - 3\sqrt[4]{2}$$

$$۲) - \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

$$۳) a\sqrt[4]{-a} \quad (a < 0)$$

۳) در هر قسمت در صورت وجود اشتباه آن را اصلاح نماید .

$$۱) \sqrt[4]{81} = \pm 3$$

$$۲) \sqrt[4]{a^4} = \pm a$$

$$۳) - 4\sqrt{5} = \sqrt{(-4)^2 \times 5} = \sqrt{80}$$

$$۴) \sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{25}$$



$$۵) \sqrt[۶]{(۲ - \sqrt{۵})^۶} = ۲ - \sqrt{۵}$$

$$۶) \sqrt{x^۲} = x$$

$$۷) \sqrt{-(-x)^۲} = -x \quad x < ۰$$

۴) حاصل هر یک از عبارات زیر را بیابید .

$$۱) \sqrt[۴]{(-۵)^۲}$$

$$۲) a^۷ = -۲^{۱۴} \Rightarrow a = ?$$

$$۳) (\sqrt[۷]{a^۵\sqrt{a}})(\sqrt[۳۵]{a})^{۲۹}$$



$$۴) \sqrt[۶]{۴ + ۲\sqrt{۳}} \times \sqrt[۳]{\sqrt{۳} - ۱} \times \sqrt[۳]{۴}$$

$$۵) \sqrt{۲}(\sqrt{۵۰} - \sqrt[۴]{۴}) + ۸^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$۶) \sqrt{۳۲a^۳ + ۹۶x} + \sqrt{a^۸ + ۳a^۵x} + \sqrt[۳]{a^۳x^۵ + ۳x^۶}$$

$$۷) \frac{(\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}+۱}}{\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}-۲}}$$

$$۸) (\sqrt[۴]{۲} - ۱)^{\sqrt{۸}}(\sqrt{۲} + ۱)^{\wedge}(\sqrt{۲} + ۱)$$



$$9) (\sqrt{5} - 1)^{\sqrt{5}+2} \times (\sqrt{5} + 1)^{\frac{3}{\sqrt{5}-2}} \times 4^{1-\sqrt{5}}$$

$$10) (3 - 2\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}+1}} (\sqrt{2} + 1)^{\sqrt{2}-1}$$

$$11) \frac{(1 + \sqrt{2})^{\sqrt{2}} (3 - \sqrt{2})^{\sqrt{2}}}{(3\sqrt{5} - \sqrt{44})^{\sqrt{5}+2} (3\sqrt{5} + \sqrt{44})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}$$

$$12) (5 - 2\sqrt{6})^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\sqrt{3}} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2\sqrt{3}}$$



$$۱۳) (\sqrt[3]{7}^{\sqrt{5}-\sqrt[3]{3}})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$$

۵) هر یک از معادلات زیر را حل کنید .

$$۱) x^{11} = -11$$

$$۲) x^{\wedge} = -6$$

$$۳) (\sqrt{x+1})^{\wedge} = x + 1$$

$$۴) x^{\sqrt{3}+\sqrt{12}} = 2^{\sqrt{75}}$$

$$۵) x^{\sqrt{3}+1} \times x^{\sqrt{3}-1} = 64$$



$$6) 4x^{2\sqrt{2}} + x^{\sqrt{2}} - 2 = 0$$

$$7) x^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = \frac{5+2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

۶) x را طوری بیابید که $3^{\sqrt{3}}$ و $x^{\sqrt{12}}$ و $3^{\sqrt{75}}$ جملات اول و پنجم و نهم یک دنباله ی هندسی باشند .

۷) عدد $A = \frac{8^{20} + 4^{20}}{8^{10} + 2^{10}}$ مفروض است ریشه ی دوم و سوم و چهارم و پنجم و ششم A را بیابید.



۸) اگر $25^x = 7$ و $7^y = 0.4$ باشد،

الف) حاصل ضرب xy را بیابید.

ب) $(0.2)^{1-x}$ چه عددی است؟

۹) a و b را چنان بیابید که داشته باشیم $(a + b\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5} - 2)^{-2+\sqrt{3}} \times (\sqrt{5} + 2)^{2+\sqrt{3}}$.
[امتیازی]

۱۰) اگر $y > 0$ و $y^3 - 3y^2 + 3y < -1$ کدام گزینه همواره صحیح است؟

۲) $\sqrt[3]{y} < y < y^3 < y^9$

۱) $\sqrt{y} > y > y^2 > y^5$

۴) $y^{-2} < \sqrt{y}$

۳) $y^{-1} < y^2$



مبحث اتحادهای جبری

تساوی ها در ریاضی :

دو نوع تساوی در ریاضی وجود دارد :

۱- معادله : تساوی است که فقط به ازای یک یا چند مقدار برقرار می باشد .

مثال :

$$2x + 5 = 3x + 2 \Rightarrow x = ?$$

۲- اتحاد : تساوی هایی هستند که به ازای تمام مقادیر برقرارند .

مثال :

$$x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$$

دو عبارت متحد :

دو چند جمله ای در صورتی متحدند که ضرائب جملات متشابه آنها دو به دو مساوی باشند .

مثال (۱)

a و b و c و d را چنان بیابید که تساوی زیر یک اتحاد باشد .

$$1) (a - 1)x^3 + (2a - b)x^2 - (b + 4c)x + (a - 2b - c - d) = x^3 - 2x^2 - 10x + 5$$

$$2) (a^2 - 1)x^3 + (2b - 4)x + (3c + 1) = (b^2 - 4)x + 10$$



$$3) a(x+2)^2 - b(x-1) + c = 2x^2 + 9x + 5$$

مثال ۲) اگر تساوی زیر یک اتحاد باشد مقدار k کدام است ؟

$$a^2 + b^2 + c^2 = k(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2) + 3abc$$

۲ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

اتحادهای فرعی :

مثال ۳) تساوی های زیر را ثابت کنید .

$$1) a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$2) a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

$$3) (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

یادمون نره سه تساوی بالا
را باید حفظ باشیم



مثال (۴) اگر $x + y = 7$ و $xy = 10$ و $x > y$ باشد حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $x^2 + y^2$

۲) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

۳) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

۴) $x - y$

۵) $x^4 + y^4$

۶) $x^2 - y^2$

مثال (۵) اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $x^2 + \frac{1}{x^2}$



مثال (۶) اگر $4 = x - \frac{3}{2x}$ باشد مطلوبست :

$$2) \quad 25x^2 + \frac{9}{4x^2} =$$

مثال (۷) اگر $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید .

$$\frac{x^6}{x^8 + 1} =$$

مثال (۸) اگر $2x^2 - x + 2 = 0$ باشد مطلوبست :

$$2x^2 + \frac{2}{x^2}$$

اتحاد جمله ی مشترک :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$



مثال ۹)

$$۱) (x - ۲)(x + ۲)(x^۲ - ۳)$$

$$۲) (x - ۲)^۲(x + ۲)^۲(x^۲ - ۳)^۲$$

$$۳) (x^۲ - x - ۴)(x^۲ - x - ۶)$$

$$۴) (۲x^۲ - ۶x)(x - ۵)$$

ریاضی دهم

اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات در جمله

$$(a + b)(a^۲ - ab + b^۲) = a^۳ + b^۳$$

$$(a - b)(a^۲ + ab + b^۲) = a^۳ - b^۳$$

مثال ۱۰)

$$۱) (x^۲ + ۱)(x^۴ - x^۲ + ۱)$$



$$۲) (۳a - ۴ab)(۹a^۲ + ۱۲a^۲b + ۱۶a^۲b^۲)$$

$$۳) (a - ۲b)^۲(a^۲ + ۲ab + ۴b^۲)^۲$$

$$۴) (۳a - ۲b)(۸۱a^۴ + ۳۶a^۲b^۲ + ۱۶b^۴)(۳a + ۲b)$$

$$۵) (x^۲ - ۲x)(x^۴ + ۲x^۳ + ۴x^۲)(x^۶ + ۸x^۳)$$

$$۶) (x + ۳)(x^۲ - ۳x + ۹)(x^۳ - ۲)$$

$$۷) (\sqrt[۳]{x} - \sqrt[۳]{y})(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{xy} + \sqrt[۳]{y^۲}) =$$

مثال (۱۱) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

$$\left(\frac{۸}{a^۶} - \dots\right)(\dots - y)(\dots + \dots + \dots)$$



$$(\dots \dots \dots) (a^1 \cdot x^r y^r - \dots + \frac{1}{a^1 \cdot x^r y^r} = \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots - b\sqrt{b} = ((a - r) - \dots)(\dots + \dots + \dots)$$

اتحاد مکعب و مجموع دو جمله

$$(a + b)^r = a^r + r a^r b + r a b^r + b^r$$

$$(a - b)^r = a^r - r a^r b + r a b^r - b^r$$

مثال (۱۲)

$$۱) (ra + rb)^r$$

$$۲) (a^r - rb)^r$$

$$۳) (ra - b)^r (ra + b)^r$$

$$۴) (r - \sqrt{r})^r$$

$$۵) (x^r - \sqrt{r})^r + (\sqrt{r} + x^r)^r$$



$$۶) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3$$

$$۷) (2x - 1)^3(4x^2 + 2x + 1)^3$$

$$۸) (2a - 1)^6$$

مثال ۱۳

$$(ax - \dots)^3 = \dots - \dots + \dots - b^3 x^3$$

$$\left(\frac{x\sqrt{2}}{2} - \dots\right)^3 = \dots - \dots + \dots - \frac{y^3\sqrt{3}}{9}$$

$$(m\sqrt{3} + \dots)^3 = \dots + 9mn\sqrt{2} + \dots + \dots$$

مثال ۱۴ عبارت $x^3 + 3x^2 + 3x - 8$ به ازای $x = \sqrt[3]{3} - 1$ را بیابید.

مثال ۱۵ ثابت کنید.

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

یادمون نره تساوی های بالا را تحت عنوان
اتحاد فرعی حفظ کنیم .



مثال (۱۶) اگر $a + 2b = 6$ و $ab = 2$ باشد، $a^3 + 8b^3$ و $a^3 - 8b^3$ را بیابید.

مثال (۱۷) اگر $a + b = 6$ و $ab = 8$ باشد حاصل $a^6 + b^6$ را بیابید.

مثال (۱۸) اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد $2x^3 + 2x^{-3}$ را بیابید.

مثال (۱۹) اگر $\frac{x^2+1}{x}$ باشد $x^6 + \frac{1}{x^6}$ را بیابید.

مثلث خیام پاسکال

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = \dots \dots$$

$$(a + b)^6 = \dots \dots$$





مثال ۲۰) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید و مجموع ضرایب هر عبارت را بنویسید .

$$(2 + x)^5 =$$

روش اول:

روش دوم:

$$(2b - 1)^6 =$$

روش اول:

روش دوم:

اتحاد اویلر :

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

صورت اول

$$\frac{1}{2}(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

صورت دوم



مثال (۲۱)

$$-) (a + 2b + 3)(a^2 + 2b^2 + 9 - 2ab - 3a - 6b) = \dots$$

مثال (۲۲) اگر $a + b + c = 3$ باشد حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$-) \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2} =$$

❖ نکته: اگر در اتحاد اویلر داشته باشیم:

$$۱) a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$۲) a = b = c \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

معادله ی زیر را حل کنید.

$$(3x - 6)^3 + (2x - 6)^3 + (12 - 5x)^3 = 0$$



تجزیه:

برای تجزیه یک عبارت کفایت مراحل زیر را طی کنیم.

قدم اول: قبل از هر کاری در صورت امکان فاکتورگیری انجام می دهیم.

مثال $4a^2b(a+b) + 2ab^2(a+b)$

–) $x(a+2) - a - 2$

قدم دوم: در صورتیکه تعداد جمله های عبارتی که می خواهیم تجزیه کنیم ۲ تا بود.

دو جمله ای ها



۱- دو جمله ای ها با توان زوج در صورتی که علامت بینشان (-) باشد از طریق اتحاد مزدوج تجزیه می شوند. مثال:

–) $4x^2 - y^4 =$

–) $2 - 2(x-3)^2 =$

–) $(3a-b)^2 - (2a+3b)^2 =$



۲- دو جمله ای ها با توان زوج در صورتی که علامت بینشان (+) باشد از طریق اتحاد فرعی مجموع مربعات دو جمله و سپس تبدیل به اتحاد مزدوج می شود. مثال:

$$-) 4a^4 + b^4 =$$

$$-) x^4 + 16 =$$

۳- دو جمله ای ها با توان مضرب ۳ و البته تفاوتی ندارد علامت بینشان (+) یا (-) باشد از طریق اتحاد چاق و لاغز تجزیه می شوند.

$$-) 27 - x^3 =$$

$$-) z^3 - 8z =$$

$$-) x^3 + \frac{x}{64} =$$



$$= 16 - (3x - 1)^2 \text{ -) ۲}$$

$$= (k + 5)^2 - k^2 \text{ -) ۲۷}$$

سه جمله ای ها



۱- وقتی سه جمله ای دارای ۲ مربع کامل هم علامت باشد و البته جمله سوم ۲ برابر حاصل ضرب جذر دو جمله دیگر از طریق اتحاد اول تجزیه خواهد شد. مثال:

$$= 1 + 2ab + a^2b^2 \text{ -) ۲}$$

$$= -x^2 + 2xy - y^2 \text{ -) ۲}$$

$$= (y - 1)^2 + 2(2x + 1)(y - 1) - (2x + 1)^2 \text{ -) ۲}$$



$$-) 2a^8 + 12a^6 + 18 =$$

۲- وقتی سه جمله ای دارای یک مربع کامل باشد معمولاً از طریق اتحاد جمله ی مشترک تجزیه خواهد شد. مثال:

$$-) x^2 - 11x - 12 =$$

$$-) 4x^2 + 14x - 30 =$$

$$-) 9x^2 - 21xy + 10y^2$$

$$-) x^4 - 7x^2 - 8 =$$

$$-) 100x^2 + 40xy - 21y^2 =$$

$$-) (x^2 - 3x)^2 - 14(x^2 - 3x) + 40 =$$



۳- وقتی سه جمله ای مربع کامل نداشته باشد. از روش A استفاده می کنیم. مثال:

$$-) 2(2x^2 + 3x + 1) = A \times 2$$

$$4x^2 + 3(2x) + 2 = 2A$$

$$(2x + 1)(2x + 2) = 2A$$

$$(2x + 1) \cancel{x} (x + 1) = \cancel{x} A \rightarrow (2x + 1)(x + 1) = A$$

$$-) 6x^2 - 5x - 6 =$$

$$-) -4x^2 + 3x^2 + x =$$

چهار جمله ای ها به بالا



۱- چهار جمله ای ها که دارای سه مربع کامل هستند معمولاً دسته بندی آن ها سه به یک است. مثال:

$$-) y^2 - x^2 + 2x - 1 =$$

$$-) a^2 b^2 + 1 - 16y^2 - 2ab =$$

$$-) 1 - 4x^2 - y^2 - 4xy =$$



$$-) x^2 + 10y - y^2 - 25 =$$

۲- چهار جمله ای ها که دارای سه مربع کامل نباشند از دسته بندی دو به دو تجزیه می شوند. مثال:

$$-) x^2 y^2 + x^2 + 3y^2 + 3x =$$

$$-) b^2 y - b^2 - a^2 y + a^2 =$$

$$-) x^2 + x^2 + x + 1 =$$

۳- بعضی از چهار جمله ای ها ممکن است تشکیل اتحاد مکعب دو جمله ای دهند. مثال:

$$-) x^2 - 3x^2 + 3x - 1 =$$

$$-) x^2 + 6x^2 + 12x + 8 =$$

$$-) \cdot / \cdot 3 x^2 y + y^2 + \cdot / \cdot 1 x^2 + \cdot / 3 x y^2 =$$



❖ نکته: سایر چند جمله ای ها با تعداد جملات بیشتر تنها از راه دسته بندی تجزیه می شوند.

$$-) x^2 - 4xy + 4y^2 + x^3 - 2x^2y =$$

$$-) a^4 + a^3 + a^2 - 2a - 3 =$$

$$-) 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 =$$

شمارنده ها و مضارب یک عدد یا یک عبارت:

مثال (۲۳) عبارت رو برو را تجزیه کنید.

$$30 =$$

الف) شمارنده های عدد ۳۰ را نام ببرید.



ب) مضارب عدد ۳۰ را نام ببرید.

$$a^2 - b^2 =$$

مثال (۲۴)

الف) شمارنده های عبارت $a^2 - b^2$ را بنویسید.

ب) مضارب عبارت $a^2 - b^2$ را بنویسید.

مثال (۲۵) بعضی از مضارب $a - b$ را بنویسید.

مثال (۲۶) عبارت $1 - 27a^3$ مضرب کدام یک از عبارت ها ست؟

د) $3a + 1$

ج) $9a^2 + 3a + 1$

ب) $3a - 1$

الف) $a - 1$



مثال ۲۷) آیا عبارت $۲(۳a - ۱)$ و $\sqrt{۳}(۳a - ۱)$ مضارب $(۳a - ۱)$ محسوب می شوند؟

تعیین ب.م.م و ک.م.م دو عبارت جبری یا دو عدد:

برای تعیین ب.م.م یا همان بزرگترین مقسوم علیه مشترک جمله های جبری ابتدا هر کدام از آن ها را تجزیه می کنیم، سپس از میان عامل های مشترک آن توانی را انتخاب می کنیم که از همه کوچکتر است و سپس این عوامل مشترک را در هم ضرب می کنیم.

$$\begin{array}{ccc} (۱۲) & \text{و} & (۴۵) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (۲^۲ \times ۳) & \text{و} & (۳^۲ \times ۵) = ۳^۱ \end{array}$$

$$(a^۲ - b^۲) \quad \text{و} \quad ۲a^۲ - ۴ab + ۲b^۲$$

$$\downarrow$$

$$\left((a-b)(a+b) \quad \text{و} \quad ۲(a-b)^۲ \right) = (a-b)^۱$$



برای تعیین ک. م. م یا همان کوچکترین مضرب مشترک جمله های جبری ابتدا هر کدام از آن ها را تجزیه کرده و سپس عوامل مشترک و غیر مشترک با بزرگترین توان موجود را در هم ضرب می کنیم.

$$[۱۲ \quad \text{و} \quad ۴۵] = ۲^۲ \times ۳ \times ۵ = ۱۸۰$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ [۲^۲ \times ۳ & \text{و} & ۳^۲ \times ۵] \end{array}$$

$$[a^۲ - b^۲ \quad \text{و} \quad ۲a^۲ - ۴ab + ۲b^۲] = [(a-b)(a+b) \quad \text{و} \quad ۲(a-b)^۲] \\ = ۲(a-b)^۲(a+b)$$

عبارات گویا:

به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند.

مثال: $\frac{x+۵}{x-\sqrt{۳}}$ و $\frac{x}{y}$ و $\frac{۹xy}{۵x^۳-۲x^۲+۱}$ و $x^۲ + ۲x - ۸$

مثال (۳۷) کدام یک از عبارت های زیر گویا نیستند. چرا؟

$$\frac{۳x - \sqrt{۷}}{x^۲} \quad \text{و} \quad \frac{x^۳ - ۱}{x^۳ + ۱} \quad \text{و} \quad \sqrt[۳]{x} - ۱ \quad \text{و} \quad \frac{۱}{\sqrt{۳}x^۲ + \sqrt{۱۷}}$$

$$\sqrt[۳]{x^۲} + x - ۱ \quad \text{و} \quad \sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{۱}{\sqrt{x-۲}}$$

❖ نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدار هایی از متغیر که مخرج آن صفر می شود تعریف نمی گردد.



مثال ۲۸) عبارات گویای زیر به ازای چه مقدار هایی از x تعریف نمی شود؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

$$\frac{x}{x}$$

$$\frac{x-2}{2-x}$$

$$\frac{x^2+1}{x-a}$$

$$\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$$

$$\frac{1+2x}{x}$$

$$\frac{xy}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{5x-1}{x(x-3)}$$

$$\frac{1}{|x|-3}$$

$$\frac{4}{(x-2)(x^2+7)}$$

$$\frac{1}{|x|+3}$$

جمع و تفریق عبارات گویا:

برای به دست آوردن حاصل جمع یا تفاضل کسرها ابتدا هر کسر را در صورت امکان ساده می کنیم پس بین کسرها مخرج مشترک گرفته و کسرها را جمع و یا تفریق می کنیم. مثال:

$$\frac{30a}{9a^2-1} + \frac{4}{3a-1} - \frac{5}{3a+1} =$$

$$9a^2 - 1 = (3a - 1)(3a + 1)$$

$$\text{م. م. ک} = (3a - 1)(3a + 1)$$

$$\frac{30a + 4(3a + 1) - 5(3a - 1)}{(3a - 1)(3a + 1)} =$$



$$\frac{30a + 12a + 4 - 15a + 5}{(3a - 1)(3a + 1)} = \frac{27a - 9}{(3a - 1)(3a + 1)} = \frac{9(3a - 1)}{(3a - 1)(3a + 1)}$$

$$1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} =$$

مثال: $1 - x = \text{م.م.ک}$

$$\frac{(1 + x + x^2)(1 - x) + x^3}{1 - x} = \frac{1 - \cancel{x} + \cancel{x} - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - \cancel{x^3} + \cancel{x^3}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

مثال (۲۹)

$$\frac{2x^3 - x^2}{x^4 + x^3} - \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} + \frac{x - 1}{x^2 - 1} =$$

مثال (۳۰)

$$\frac{1}{(a - b)(a - c)} + \frac{1}{(b - a)(b - c)} + \frac{1}{(c - a)(c - b)} =$$



مثال (۳۱)

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1} =$$

مثال (۳۲)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

مثال (۳۳)

$$\frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$



مثال ۳۴) حاصل عبارتهای روبرو را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید .

$$\frac{x^3 - 1}{(x - 1)^3}$$

$$\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y}$$



تجزیه به زور

$$x^3 + 1 = (\sqrt[3]{x^3} + 1)(\quad)$$

$$x - 1 = (\quad)(\quad)$$

$$x - 1 = (\quad)(\quad)$$

$$a^6 + a^3 + 1$$

هرگاه مجموع ضرایب یک چند جمله ای صفر شود عبارت بر $x - 1$ بخش پذیر است .



مثال (۳۵) اگر $\frac{35x-29}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ باشد حاصل AB را بیابید.

مثال (۳۶) اگر $\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$ باشد حاصل A + B + C را بیابید.

گویا کردن مخرج های گنگ

(۱) گویا کردن مخرج کسرهایی که عبارت مخرج آن ها به صورت $\sqrt[n]{a^m}$ ($m < n$) می باشد :

برای گویا کردن مخرج چنین کسرهایی کافیست صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب کنیم.

مثال (۳۷)

$$\frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{16}}$$



$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

۲) مخرج کسر به صورت $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ باشد :

در این حالت صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم .

مثال ۴۳۸)

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\frac{3}{2-\sqrt[4]{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$



$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}$$

۳) گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آن ها به صورت $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ یا $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ یا $\sqrt{a^2} \pm \sqrt{ab} + \sqrt{b^2}$ می باشند :

- در این صورت اگر مخرج کسر پرانتز لاغر اتحاد چاق و لاغر است صورت و مخرج را در پرانتز چاق آن ضرب و در صورتی که مخرج پرانتز چاق اتحاد چاق و لاغر باشد صورت مخرج را در پرانتز لاغر آن ضرب می کنیم .

مثال (۳۹)

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}}$$



$$\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[4]{3} + 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{2}}$$

رادیكال مرکب :

تبدیل رادیكال مرکب به رادیكال ساده

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

مثال (۴۰)

$$\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}} =$$

$$\sqrt{6 + \sqrt{11}} =$$



$$\sqrt{7 - \sqrt{13}} =$$

$$\sqrt{27 + 8\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}$$

مثال (۴۱) کدام یک از اعداد زیر گنگ و کدام گویا هستند.

$$(1 + \sqrt{2}) \times \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{8 + \sqrt{33 + 8\sqrt{2}}}}$$

❖ نکته : اگر مجموع چند عبارت جبری همواره نامنفی صفر شود ، تک تک آنها صفر بوده است .



مثال ۴۲) اگر $c^6 = 0$ ، $(a + b - 2)^4 + (a - 2)^{200} + (a + b + c)$ باشد ، $a + b + c$ را بیابید .

مثال ۴۳) اگر $|a + b + c| + \sqrt{a - 2b} = 0$ باشد ، حاصل $\frac{ab}{a^2 + c^2}$ را بیابید .

تمرینات تکمیلی

۱) حاصل هریک از عبارت های زیر را با استفاده از اتحاد بیابید .

۱) $(4x^2 - 6x)(4x^4 + 6x^3 + 9x^2)$

۲) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^3 - 6)$

۴) $(x - 1)^3(x + 1)^3(x^2 - x + 1)^3(x^2 + x + 1)^3$

۵) $(y + 2)(y - 2)(2y^4 + 32 + 8y^2)$



$$۶) (x + a - ۲)((x - ۲)^۲ - ax + ۲a + a^۲)$$

$$۷) (۲a + ۱ - y)((۲a + ۱)^۲ + (۲a + ۱)y + y^۲)$$

$$۸) \left[\frac{y^۴}{۸۱} + \frac{x^۴}{۱۶} + \frac{x^۲y^۲}{۱۸} \right] \left(-\frac{y}{۳} + \frac{x}{۲} \right) \left[-\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} \right] \left(-\frac{x}{۲} - \frac{y}{۳} \right) =$$

$$۹) (a^۶ - ۲a^۳ + ۱)(a^۶ + a^۳ + ۱)^۲$$

$$۱۰) (a^۸ + a^۴ + ۱)(۲a - ۲)(a^۲ + ۱)(a + ۱)$$



$$۱۱) (a^2 + 2a + 4)(a^6 + 8a^3 + 64)(a - 2)(a^9 + 8^3)$$

۲) حاصل عبارت $(49/99)^2 - (50/01)^2$ برابر است با :

۰/۲ (۱) ۰/۰۲ (۲) ۲ (۳) ۲۰ (۴)

۳) حاصل عبارت $A = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) \dots (2^{64} + 1)$ برابر است با :

$2^{128} + 1$ (۱) $2^{128} + 1$ (۲) $2^{256} - 1$ (۳) $2^{128} - 1$ (۴)

۴) اگر $x + y = 2$ و $xy = -1$ حاصل $15x^2 + 9y^2 = ?$ در صورتی که $|x| > |y|$

$12(6 - \sqrt{2})$ (۱) $12(6 + \sqrt{2})$ (۲) $24(6 - \sqrt{2})$ (۳) $24(6 + \sqrt{2})$ (۴)

۵) عبارت های زیر را تجزیه کنید.

۱) $x^6 - 7x^3 - 8 =$

۲) $(x^2 - 2xy + y^2) - 3(x - y) + 2 =$



$$۳) a^6 - b^9$$

$$۴) x^{12} - ۱$$

$$۵) ۸ax - bx + ۸ay - by$$

$$۶) a^2 + b^2 - c^2 + a + b + c + ۲ab$$

$$۷) x^2(x - a) + (a - x)$$

$$۸) x^5 + x^3 - ۸x^2 - ۸$$



$$۹) (x^2 + (a + b)x + ab)(x - a)(x - b)$$

$$۱۰) 4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$$

$$۱۱) a^4 + a^3 + a^2 - 2a - 3$$

$$۱۲) a^9 - 512$$

$$۱۳) x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$۱۴) 6x^3 - 7x^2 + 1$$

$$۱۵) x^5 + 3x^2 + 2x$$



$$۱۶) x^2 - 2xy - 4y^2$$

$$۱۷) x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$$

$$۱۸) (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$$

$$۱۹) a^3 + a - 10$$

۶) اگر $3x^2 - x + 3 = 0$ باشد ، حاصل عبارات زیر را بیابید .

$$۱) x^6 + \frac{1}{x^6}$$

$$۲) 3x^2 + 3x^{-2}$$



۷) اگر $(x - 2y)^3 = 4$ باشد، حاصل $(y - \frac{x}{2})^9$ را بیابید.

۸) اگر $a^2 + b^2 - 4ab = 0$ باشد، $(\frac{a+b}{a-b})^2$ را بیابید.

۹) از رابطه ی زیر مقدارهای x و y و z را بدست آورید. [امتیازی]

$$x + y + z = 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} + 6\sqrt{z-9}$$

۱۰) اگر بدانیم یکی از عامل های تجزیه ی چند جمله ای A ، چند جمله ای B است، در هر مورد A را تجزیه کنید.

$$A = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

$$B = 2x - 1$$

$$A = x^5 + x + 1$$

$$B = x^2 + x + 1$$



(۱۱) معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = 6$$

(۱۲) اگر تفاضل دو عدد ۵ و حاصل ضرب آنها ۶- باشد مجموع مربعات دو عدد را بیابید.

(۱۳) حاصل عبارت $(x-2)^5 + (2-x)^5$ را بیابید.

(۱۴) اگر $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ حاصل $x^3 - 3x$ را بیابید.



(۱۵) اگر $x^2 + 7x - 11 = 0$ باشد حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$$

(۱۵) حاصل عبارت $x^3 - 6x^2 + 12x - 2$ را به ازای $x = \sqrt[3]{3} + 2$ بیابید.

(۱۶) اگر $\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$ باشد $A + B + C$ را بیابید.

(۱۷) اگر $\frac{ax^2-ax}{4x^2} \times \frac{x^2+x^2+x}{x^3-1} = 2$ باشد آنگاه a را بیابید.

(۱۸) چه عبارتی در $1 - \frac{3}{x}$ ضرب شود تا حاصل برابر $\frac{12}{x} + 7 - x$ شود؟



۱۹) حاصل عبارات زیر را بیابید .

$$۱) (2x^2 - x - 6) \div \left(\frac{4}{x^2} - 1\right)$$

$$۲) \frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1}{-2x^2 + 8x - 8}$$

$$۳) \frac{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} \div \left(\frac{-a + b + c}{a + b + c}\right)$$

$$۴) \frac{(x + y)^{-2} - x^{-2}}{y}$$



$$\delta) (a^2 - x + \frac{2x^2}{a^2 + x})(a^2 + x)$$

۲۰) حاصل عبارت $(x^2 + xy + y^2)(x^6 + x^3y^3 + y^6)$ در صورتیکه $x - y = 1$ باشد چقدر است ؟